**Муҳандислик масалаларини оддий дифференциал**

## тенгламалар ёрдамида ифодалаш

Режа:

1. Оддий дифференциал тенгламаларнинг таърифи.
2. Оддий дифференциал тенгламаларни пайдо бўлиш тарихи.
3. Биринчи даражали дифференциал тенгламалар.
4. Ўзгарувчилари ажраладиган тенгламалар. Ўзгарувчилари ажраладиган тенгламаларга келтириладиган физикавий масалаларга мисоллар.
5. Бир жинсли тенгламалар. Квази бир жинсли тенгламалар. Чизиқли тенгламалар.
6. Интеграллайдиган кўпайтувчи усули. Ўзгармасни вариациялаш усули (Лагранж усули).
7. Бернулли тенгламаси. Биномиал дифференциал тенглама.

*Калит сўзлар: оддий дифференциал тенгламалар, нормал дифференциал тенгламалар, Коши масаласи, ўзгарувчилари ажраладиган, бир жинсли ва квази бир жинсли тенгламалар, чизиқли тенглама, интеграллайдиган кўпайтувчи усули, ўзгармасни вариациялаш усули, Бернулли тенгламаси, Рикатти тенгламаси.*

Оддий дифференциал тенгламалар (О.Д.Т.) – бу қуйидаги кўринишдаги дифференциал тенгламадир:

 (6.1)

бу ерда *y*(*x*) – боғлиқмас ўзгарувчи *х* га боғлиқ номаълум функция (у векторфункция бўлиши ҳам мумкин, у ҳолда *F* ҳам одатда вектор-функция бўлади ва (6.1) дифференциал тенгламалар тизимини пайдо қилади). n сони (берилган тенгламага кирувчи энг катта ҳосила тартиби) (6.1) дифференциал тенгламанинг тартиби деб аталади. Боғлиқмас ўзгарувчи *х* кўпинча вақт сифатида интерпритацияланади (айниқса физик ва бошқа табиий фанлар масалаларида пайдо бўладиган дифференциал тенгламаларда), шунинг учун у кўпинча *t* ҳарфи билан белгиланади. *y* ўзгарувчи – вақтга боғлиқ равишда ўзгарадиган кандайдир катталак (ёки катталиклар жамланмаси, агар y вектор функция бўлса). Мисол учун *y* нуқтанинг фаъзодаги координаталари тўпламини англатиши мумкин; бу ҳолатда (6.1) тенглама нуқтанинг фаъзодаги ҳаракатини, яъни унинг координатиларини вақт ўтиши билан ўзгартиришини тасвирлайди. Боғлиқмас ўзгарувчи *х* одатда ҳақиқий қийматларни қабул қилади, лекин *х* ўзгарувчи комплекс бўлган дифференциал тенгламалар ҳам кўрилади.

Кўпинча энг катта ҳосила  нинг *x*, *y* ўзгарувчилар ва *n* даражадан кам бўлган  ҳосилаларнинг функцияси кўринишида ифодаланадиган қуйидаги кўринишдаги дифференциал тенгламалар учрайди:

 (6.2)

Бундай дифференциал тенгламалар *нормал* ёки *ҳосилага нисбатан ечилган* тенгламалар деб аталади.

(6.2) кўринишидаги тенгламаларга қарама-қарши ўлароқ (6.1) кўринишидаги дифференциал тенгламаларни *ҳосилага нисбатан ечилмаган* ёки *аниқмас* дифференциал тенгламалар деб аталади.

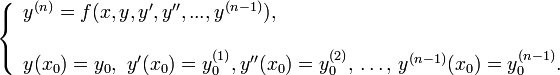
(6.2) дифференциал тенгламасининг ечими деб ўзининг аниқланиш соҳасидаги барча нуқталарда тенгламани қониқтирадиган *n* марта дифференциалланувчи *y(x)* функциясига айтилади. Одатда бундай функцияларнинг тўплами мавжуд бўлади ва улардан бирини танлаш учун унга қўшимча шарт қўйилиши керак.

(6.2) тенгламаси учун бошланғич шарт деб қуйидагига айтилади:



(6.3)

бу ерда х0 – боғлиқмас ўзгарувчининг берилган қиймати (берилган вақтда). *y*0 ва  – мос равишда *у* функцияси ва унинг *n-*1 гача бўлган ҳосилаларининг берилган қийматлари. (6.2) дифференциал тенгламаси (6.3) бошланғич шарти билан биргаликда бошланғич масала ёки Коши масаласи деб аталади:



Коши масаласи, (6.2) тенгламанинг ўнг томонида турган *f* функциясига етарлича умумий чекловларда,  бошланғич қийматига эга бўлган *х* вақт ўқининг баъзи оралиқларида аниқланган ягона ечимга эга бўлади (умуман айтганда бу оралиқ бутун ўқ билан мос келмаслиги мумкин).

Дифференциал тенгламалар назариясининг асосий масалалари ва натижалари: ҳар хил масалаларнинг ОДТ учун ечимнинг мавжутлиги ва ягона бўлиши, энг оддий ОДТни ечиш усуллари, ОДТ ечимининг аниқ кўринишини топмасдан туриб уларни сифатли тадқиқ қилиш.

**Тарих**.

Энг оддий дифференциал тенгламалар И.Нъютон ва Г.Лейбицларнинг ишларида учраган; “дифференциал тенгламалар” атамаси Лейбницга тегишли. Нъютон “флюкс” ва “флюент”лар ҳисобини яратишда иккита масала қўйган: флюентлар орасидаги берилган муносабатлар бўйича флюкслар орасидаги муносабатларни аниқлаш; ўз ичига флюксларни олувчи берилган тенглама бўйича флюентлар орасидаги муносабатларни аниқлаш. Замонавий нуқтаи назардан ушбу масалалардан биринчиси (функция бўйича уларнинг ҳосиласини ҳисоблаш) дифференциал ҳисобга тегишлидир, иккинчиси эса оддий дифференциал тенгламалар назарияси мазмунини беради. *f(x)* фукциясининг ноаниқ интегралини *F(x)* топиш масаласини Нъютон иккинчи масаланинг ҳусусий ҳолати сифатида кўриб чиққан. Бундай ёндашув математик табиатшунослик асосларини яратувчиси Нъютон учун табиий эди, чунки жуда кўп ҳолларда у ёки бу жараёнларни бошқарувчи табиат қонунлари дифференциал тенгламалар шаклида ифодаланади, бу жараёнларнинг қандай кечишини ҳисоблаш дифференциал тенгламаларни ечишга олиб келинади.

Нъютон махфийлаштириш керак деб ҳисоблаган ва фақатгина анаграмма кўринишида эълон қилган асосий кашфиёти қуйидагидан иборат: «Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa». Замонавий математик тилга ўгирганда бу қуйидагиларни англатади: “дифференциал тенгламаларни ечиш фойдали”. Ҳозирги вақтда дифференциал тенгламалар назарияси математиканинг барча бўлимларидаги назарий тадқиқотларни доимий рағбатлантириш учун юқори даражада фойдали бўлган катта ҳажмдаги ҳар хил конгломерат ғоя ва усуллардан иборат.

**Мисоллар:**

* Дифференциал тенгламаларни энг содда қўлланишларидан бири – тезланишнинг маълум проекцияси бўйлаб жисмнинг траекториясини аниқлаш каби тривиал бўлмаган масалани ечиш. Мисол учун, Нъютоннинг иккинчи қонунига мувофиқ, жисмнинг тезланиши унга таъсир қилаётган кучлар йиғиндисига тўғри пропорционалдир; мос келувчи дифференциал тенглама  кўринишига эга. Таъсир қилувчи (ўнг томон) кучларни била туриб, бу тенгламани ечиш ва бошланғич шартни ҳисобга олиб (бошланғич вақтдаги координата ва тезлик) нуқталарни ҳаракатланиш траекторияси аниқлаш мумкин.
* Дифференциал тенглама , бошланғич шарт  билан қуйидаги экспонентани беради: . Агар *х* вақтни белгиласа, бу функция мисол учун манбалар чекланмаган шароитда аҳолини ўсишини ва бошқа кўпгина мисолларни тасвирлайди.



* Ўнг томони номаълум функцияга боғлиқ бўлмаган дифференциал тенгламанинг ечими аниқ бўлмаган интеграл ҳисобланади, бу ерда С – ихтиёрий константа.



Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар.

**Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар.**

 дифференциал тенглама ўзгарувчилари ажраладиган

тенглама деб аталади, агар унинг ўнг қисми  кўринишида ҳолат бўлганда тенгламанинг умумий ечими

берилса, у ҳолда



бўла

ди.

**Ўзгарувчилари ажраладиган тенгламаларга олиб келувчи физик масалаларга мисоллар**

***Жисм танасининг совуши***

Т – тана ҳарорати, Т0 –атроф муҳит ҳарорати (Т> Т0), Q – иссиқлик миқдори, с – солиштирма иссиқлик сиғими бўлсин. У ҳолда ҳарорат тенглашгунча атроф муҳитга узатиладиган иссиқликлар миқдори қуйидаги кўринишда ифодаланади , ёки дифференциал кўринишида томондан, иссиқлик берилиш тезлигини кўринишида ифодалаш мумкин, бу ерда *к* - кандайдир



.

Бошқа



пропорционаллик коэффициенти. Ушбу тенгламалардан  ни чиқариб ташлаб, ўзгарувчилари ажраладиган тенгламани оламиз:



Ушбу тенгламанинг умумий ечими қуйидаги функциялар оиласи ҳисобланади .

**Бир жинсли тенгламалар.**

Агар - нолинчи даражали бир жинсли функция бўлса дифференциал тенглама **бир жинсли** деб аталади. Агар ҳар қандай учун тенглик бажарилса,  функция *k* даражали бир жинсли деб аталади.



алмаштириш бир жинсли тенгламани



бўлганда



ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага олиб келади:



Бошланғич тенгламага қўйиб қуйидагини оламиз:



Бу ўзгарувчилари ажраладиган тенглама ҳисобланади.

**Квази бир жинсли тенгламалар.**

 дифференциал тенгламалар **квази бир жинсли деб**

**аталади**, агар ҳар қандай муносабат бажарилса.



учун



алмаштириш билан ечилади: қўйиб, қуйидагини оламиз:

Б

е

рилган

тенглама



Квази бир жинсли

бўлгани учун



,

Аниқки бу бир жинсли тенглама ҳисобланади.

**Чизиқли тенгламалар**  тенглама чизиқли деб аталади ва иккита усул билан

ечилиши мумкин: интеграллайдиган кўпайтувчи усули ва ўзгармасларни вариация қилиш усули.

**Интеграллайдиган кўпайтувчи усули**

Интеграллайдиган кўпайтувчи -  функция қуйидаги кўринишда берилган бўлсин:



Бошланғич тенгламанинг иккала томонини  га кўпайтириб қуйидагини оламиз:

функциянинг *х* бўйича



Аниқлаш мумкинки

чап томон



ҳосиласи ҳисобланади. Шунинг учун тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:



Интеграллаймиз:



Шундай қилиб, чизиқли тенгламанинг ечими қуйидагича бўлади:



**Ўзгармасларни вариация қилиш усули (Лагранж усули)**  бир жинсли тенгламани кўриб чиқамиз. Аниқки, бу

ўзгарувчилари ажраладиган тенглама, унинг ечими:



Бошланғич тенгламанинг ечимини қуйидаги кўринишда излаймиз:



Олинган ечимни бошланғич тенгламага қўйиб:

,

қуйидагини оламиз:



б

у ерда



иҳтиёрий констант

а

.

Шу тариқа, бошланғич тенгламанинг ечимини бир жинсли тенглама ечимига *с(х)* ни қўйиш йўли билан олса бўлади:



**Бернулли тенгламаси**  дифференциал тенглама **Бернулли тенгламаси**

деб аталади (*n*=0 ёки *n*=1 да бир жинсли ёки бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламани оламиз). *n*=2 бўлганида Риккати тенгламасининг ҳусусий ҳолати ҳисобланади. Ушбу тенглама уни 1695 йил эълон қилган Якоб Бернулли шарафига қўйилган. Ушбу тенгламани алмаштириш йўли билан чизиқли тенгламага келтирувчи усулни унинг акаси Иоганн Бернулли 1697-йилда топган.

**Биноменал дифференциал тенглама**

Биноменал дифференциал тенглама деб, кўринишидаги тенгламага айтилади, бу ерда *m* – натурал сон, - икки ўзгарувчанли кўпҳад.

